PROBLEME DE SYRACUSE: "MAJORATIONS" ELEMENTAIRES DES CYCLES

Abstract: *In order to study the Syracuse problem, one conjectures it has no cycles. In agree with it, we show there are only a finite number of cycles having n local minima, for every n, and we give a bound of their length.*

Introduction

Pour résoudre le problème encore ouvert de Syracuse (à savoir: les suites itérées (u_n) définies par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et

$$u_{n+1} = f_3(u_n) = \begin{cases} (3u_n+1)/2 & \text{si } u_n \text{ est impair} \\ u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair} \end{cases}$$

finissent-elles toujours par prendre la valeur 1?) nous nous intéressons à l'un des deux autres comportements a priori possibles de la suite, les cycles distincts de $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$, et généralisons de façon élémentaire une observation faite par Davidson [3], et utilisée par Steiner [6] pour montrer qu'il n'existe pas de cycles de la forme $u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots u_{m+m'} = u_0$ où $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$ sont impairs et $u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+m'-1}$ pairs.

La forme la plus générale de cycle est constituée de n successions de séquences impairs-pairs, ou, ce qui revient au même, de n séquences croissantes alternant avec des séquences décroissantes. Un résultat analogue à l'existence d'un nombre fini seulement de cycles de longueur donnée [2] est alors obtenu:

Théorème

Pour chaque entier n, il n'y a qu'un nombre fini de cycles alternant n séquences d'entiers impairs avec n séquences d'entiers pairs.

Pour le montrer, on trouve une majoration de la longueur des cycles en fonction de n, majoration qui dépend de la précision avec laquelle on peut approcher $\ln 3/\ln 2$ par des rationnels, précision donnée par la théorie des nombres transcendants [1], [6]:

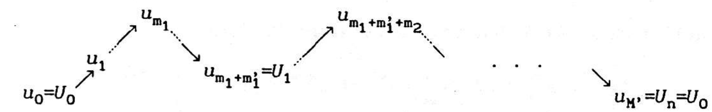
$$M^{-15} < \left| \frac{M'}{M} - \frac{\ln 3}{\ln 2} \right| \qquad (\forall\ M,\ M' \in \mathbb{N}\ ,\quad M \geq 2) \tag{1}$$

Démonstration

Soit m_i et m'_i les longueurs respectives des i-èmes séquences croissantes et décroissantes, et

$$M_j = \sum_{i=1}^{j} m_i\ , \quad M'_j = \sum_{i=1}^{j} m_i + m'_i\ , \quad M = M_n\ , \quad M' = M'_n\ , \quad U_j = u_{M'_j}\ .$$

M' est ainsi la longueur du cycle, dont les U_j sont les minima locaux. On peut supposer que $U_0 = u_0$ est le plus petit d'entre eux:



Nous suivons [5] pour le plan de la démonstration, en adoptant partout où cela est possible la fonction itérée plus générale f_a , avec $a \geq 3$ impair et $f_a(x) = (ax+1)/2$ si x est impair, $x/2$ sinon. Démontrons le lemme suivant

<u>Lemme 1:</u> $\quad \dfrac{M'}{M} - \dfrac{\ln a}{\ln 2} < \dfrac{1}{(a-2)u_0 \ln 2} \dfrac{n}{M}$.

Par construction on a pour $0 \leq j \leq n$:

$$2^{m'_j} U_j = \left(\frac{a}{2}\right)^{m_j} U_{j-1} + \frac{1}{a-2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^{m_j} - 1\right]$$

qu'une récurrence exprime en fonction de U_0:

$$2^{M'_j} U_j = a^{M_j} U_0 + \frac{1}{a-2}\sum_{k=1}^{j} 2^{M'_{k-1}} a^{M_j - M_{k-1}}\left[1 - \left(\frac{2}{a}\right)^{m_k}\right] \tag{2}$$

ce qui permet en majorant le crochet par 1 de montrer que

$$2^{M'_j} \leq \left(1 + \frac{1}{(a-2)U_0}\right)^j a^{M_j}\ . \tag{3}$$

En effet $M'_0 = M_0 = 0$ montre que l'inégalité est vraie pour j=0, et si elle est vraie à l'ordre j-1 et aux précédents alors avec les remarques ultérieures

$$\begin{aligned} 2^{M'_j} U_0 &\leq 2^{M'_j} U_j \\ &< a^{M_j} U_0 + \frac{1}{a-2}\sum_{k=1}^{j} 2^{M'_{k-1}} a^{M_j - M_{k-1}} \\ &\leq a^{M_j} U_0 + \frac{1}{a-2}\sum_{k=1}^{j} \left(1 + \frac{1}{(a-2)U_0}\right)^{k-1} a^{M_{k-1}} a^{M_j - M_{k-1}} \\ &= a^{M_j} U_0 \left(1 + \frac{1}{(a-2)U_0}\right)^j \end{aligned}$$

ce qui montre l'inégalité (stricte) à l'ordre j. En en prenant le logarithme à l'ordre n on obtient

$$M' \ln 2 < n \ln\left(1 + \frac{1}{(a-2)U_0}\right) + M \ln a < n \frac{1}{(a-2)U_0} + M \ln a\ .$$

■

Montrons d'autre part le

<u>lemme 2:</u> $\quad 0 < \dfrac{M'}{M} - \dfrac{\ln a}{\ln 2}$.

Pour cela appliquons (2) à $j=n$ pour déterminer $U_n=U_0>0$:

$$U_0 = \left(2^{M'} - a^{M}\right)^{-1} \frac{1}{a-2} \sum_{k=1}^{n} 2^{M'_{k-1}} a^{M-M_{k-1}} \left[1 - \left(\frac{2}{a}\right)^{m_k}\right] \tag{4}$$

donc $2^{M'} - a^{M} > 0$.

■

Pour le cas a=3, de (1) et des deux lemmes découle l'inégalité

$$M^{-15} < \frac{1}{u_0 \ln 2} \frac{n}{M}$$

autrement dit

$$u_0 < \frac{1}{\ln 2} n M^{14} \tag{5}$$

donc si l'on montre, à n fixé, que u_0 est par ailleurs minoré par $A^M + B$ où A>1 et B sont des réels ne dépendant que de n, les M vérifiant (5) seraient alors majorés, par comparaison d'une puissance et d'une exponentielle. Comme les deux lemmes précédents s'écrivent encore

$$M \frac{\ln a}{\ln 2} < M' < M \frac{\ln a}{\ln 2} + \frac{n}{(a-2)u_0 \ln 2} \tag{6}$$

la longueur M' des cycles serait elle-même majorée, et le théorème serait démontré (en notant à l'aide de (4) par exemple que u_0 est déterminé par la donnée des m_i et m'_i , qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs à M' fixé). La minoration de u_0 est l'objet des deux lemmes suivants.

<u>**Lemme 3:**</u> $\left(\frac{2}{a}\right)^{M_{j-1}} 2^{m_j} - (a-2)\left(\frac{a-1}{a-2}\right)^n \leq (a-2)\, u_0 \qquad (1 \leq j \leq n)$.

En effet, en multipliant (4) par $(2^{M'} - a^{M})(a-2)$ et réunissant dans le terme de gauche les multiples de 2 à la puissance $M'_{j-1} + m_j$, cette puissance de 2 divise le terme de droite suivant

$$a^{M}(a-2)U_0 + 2^{M'_{j-1}} a^{M-M_{j-1}} + \sum_{k=1}^{j-1} 2^{M'_{k-1}} a^{M-M_{k-1}} \left[1 - \left(\frac{2}{a}\right)^{m_k}\right]$$

qui est aussi divisible par $a^{M-M_{j-1}}$. Or ce facteur est impair donc $2^{M'_{j-1}+m_j}$ divise aussi l'expression précédente divisée par la puissance de a mentionnée. Cette expression étant strictement positive elle est minorée par son diviseur, ce qui permet d'avoir après majoration du crochet par 1,

$$(a-2)U_0 \geq 2^{M'_{j-1}+m_j} a^{-M_{j-1}} - \sum_{k=1}^{j} 2^{M'_{k-1}} a^{-M_{k-1}} .$$

Sachant que $M'_{j-1} \geq M_{j-1}$, il reste à appliquer (3):

$$\sum_{k=1}^{j} 2^{M'_{k-1}} a^{-M_{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{j} \left(1 + \frac{1}{(a-2)U_0}\right)^{k-1}$$

$$< \sum_{k=1}^{j} \left(\frac{a-1}{a-2}\right)^{k-1} = (a-2)\left[\left(\frac{a-1}{a-2}\right)^{j} - 1\right]$$

$$< (a-2)\left(\frac{a-1}{a-2}\right)^n$$

■

<u>**Lemme 4:**</u> $2^{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^n-1}\right)M} - (a-2)\left(\frac{a-1}{a-2}\right)^n \leq (a-2)\, u_0 \quad$ avec $\alpha = \frac{\log a}{\log 2}$.

d'après le lemme 3 il suffit de montrer que

$$2^{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^n-1}\right)M} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{2}{a}\right)^{M_{j-1}} 2^{m_j}.$$

Cette relation apparait si l'on recherche le minimum de ces maxima parmi tous les n-uplets (m_i) de réels positifs de somme fixée M. Pour le n-uplet réalisant ce minimum, grâce à la continuité et à la monotonie de la fonction dont on considère le maximum, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est alors indépendant de j, ce qui permet de l'éxpliciter, et cela donne de façon directe le membre de gauche.

L'on voit ainsi que ce le lemme est optimal si l'on part du lemme 3 et si l'on ne prend pas en compte d'autres propriétés éventuelles des (m_i).

■

<u>Corollaire:</u>

En utilisant la minoration $M' \geq 275000$ déduite dans [4] de calculs par ordinateur, condition nécessaire à tout cycle, les résultats de cet article permettent de savoir qu'il n'y a pas de cycle avec $n \leq 13$.

O. Rozier

<u>Références</u>

[1] A. Baker: **Transcendental Number Theory.** Cambridge Univ. Press, 1975.

[2] C. Böhm, G. Sontacchi: **On the existence of cycles of given length in integer sequences like $x_{n+1} = x/2$ if x_n even, and $x_{n+1} = 3x_n + 1$ otherwise.** Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 64, 1978, p.260-264.

[3] J.L. Davidson: **Some comments on an iteration problem.** Proc. 6th Manitoah Conf. on Numerical Mathematics, 1976, p.155-159.

[4] J.C. Lagarias: **The $3x + 1$ problem and its generalizations.** Amer. Math. Monthly 92, 1985, p.3-23.

[5] O. Rozier: **Démonstration de l'absence de cycles d'une certaine forme pour le problème de Syracuse.** Singularité vol.1 n°3, 1990, p.9-12.

[6] R.P. Steiner: **A theorem on the Syracuse problem.** Proc. 7th Manitoah Conference on Numerical Mathematics-1977, Winnipeg, 1978, p.553-559.

[6] M. Waldschmidt: **Equations diophantiennes et nombres transcendants.** Revue du Palais de la Découverte vol.17 n°144, 1987, p.10-24.